27/4/20

Θεωρήματα Διατήρησης

Μια σωστή εξίσωση προκύπτει άμεσα από τα συντηρητικά πεδία:

Δε χρειάζεται να ξέρω και τα 2 τουλ. ένα απ' αυτά

Απ' όλο αυτό αυτό που και $W_{έργο} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) = 0$

χρειάζεται δι' αυτή τη διαφορά είναι πόσο κάνει το $f(A)$ → γιατί μετά θα μάθω και το $f(B)$

Δηλ. $\boxed{f(A) = f(B)}$ ή συνολικά $W = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Η ενέργεια που ξοδέψαμε για να μετακινήσουμε ένα υλικό σημείο μάζας m είναι μηδέν. Είναι φυσικά αποδεκτό? Τι γίνεται όταν δεν είναι?

Για κάθε λύση της εξίσωσης υπάρχει μία ποσότητα που διατηρείται

Διατήρηση της ορμής:

Αν σε ένα υλικό σημείο δεν επιδρούν δυνάμεις η ορμή του διατηρείται

ή η συνισταμένη των δυνάμεων είναι 0

Απόδειξη:

Από το νόμο του Newton $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ αν $\vec{p} = \vec{0}$

$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ ή $\vec{p}$ = σταθερή αλλά δεν αναφέρεται πουθενά ότι η ταχύτητα ή η μάζα του σώματος είναι σταθερή

Δεν υπονοείται ότι η ταχύτητα του είναι σταθ.

Διατήρηση της στροφορμής:

$\tau = 0$ μέγεθος που ορίσαμε σε κβάντα

σημαντικό μέγεθος

Ορίζουμε ως στροφορμή το διάνυσμα

Έστω m: σταθ. $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})}$

όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης και $\vec{p}$ η ορμή του υλικού σημείου.

$\vec{r} \times \vec{p}$: μου δίνει θέση και κατεύθυνση και μας δείχνει πόσο γρήγορα κινείται το σώμα

Φυσική σημασία: Χαρακτηρίζει περιστρεφόμενα σώματα και συνήθως καλείται και γωνιακή ορμή. Χαρακτηρίζει την αδράνεια ως προς την κίνηση ενός σώματος γύρω από έναν άξονα. Η διεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής του σώματος

↑ Η διεύθυνση του σώματος

Παρατήρηση: Η ιδέα της κβαντομηχανικής ξεκινάει από την "κβάντωση" της στροφορμής

εξωτ. γινόμενο ? παράλληλων είναι 0

Τώρα: παίρνω την παράγωγο → $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} =$

$= 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$ Θέλω να διατηρείται ⇒ αρκεί να η παράγωγος του είναι 0

Δηλαδή $\vec{L}$ = σταθερή όταν ⇒ $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$ - (ροπή)

Η στροφορμή διατηρείται υπό προϋποθέσεις $= \vec{0}$

Διατήρηση της Ενέργειας: Από πού προκύπτει ότι η Ενέργεια διατηρείται?

Γνωρίζουμε ότι: $* \frac{d\vec{v}}{dt} dt = d\vec{v}$: Αν και δεν επιτρέπονται οι πράξεις με τα διαφορικά

Αναλύω την F

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v}\, dt = \int_A^B m \vec{v}\, d\vec{v}$$

μέγεθος να κάνω πράξεις — δεν είναι ένα καλό — Η m είναι σταθ.

Όμως αν: $\vec{v} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}$: διάνυσμα ταχύτητας

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: σταθ. $\quad d\vec{v} = dv_1 \hat{i} + dv_2 \hat{j} + dv_3 \hat{k}$: αντίστοιχο διαφορικό

εσωτ. γινόμενο

Δηλαδή $\vec{v} \cdot d\vec{v} = v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + v_3 dv_3 =$

(*) $= \frac{1}{2} d(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = \frac{1}{2} d|\vec{v}|^2$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

το μέτρο του διανύσματος ($\vec{v}$) στο τετράγωνο — δεν είναι διάνυσμα πλέον

(ΘΜΚΕ) ⇒

Άρα: $W=\int_A^B m\frac{1}{2}\, d|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} m|\vec{v}|^2_B - \frac{1}{2} m|\vec{v}|^2_A =$

$= T_B - T_A$

Όπου $\boxed{T=\frac{1}{2} m|\vec{v}|^2}$ η κινητική ενέργεια

Πού βγάζουμε το 1/2? Από την ολοκλήρωση (*)

Έστω τώρα ότι το πεδίο $\vec{F}$ των δυνάμεων είναι διατηρητικό. Δηλαδή:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f$$

Από τον ορισμό

$$W = f(B) - f(A) = T_B - T_A \Rightarrow T_B - f(B) = T_A - f(A)$$

Πλέον τις δυνάμεις θα τις γράφουμε ως $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} V}$ (*) (η δυναμική ε)

Ορίζω μια συνάρτηση $\boxed{V=-f}$ που αποκαλώ δυναμικό (και αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια) και τελικά

$T_B + V_B = T_A + V_A$: "Ό,τι ξεκινάς με τόσο καταλήγεις"

Η συνολική ενέργεια ενός συντηρητικού πεδίου διατηρείται. Άρα:

Δεν διατηρείται αυτό πεδίο δεν είναι συντηρητικό, γιατί σε άλλα πεδία ∃ απώλειες

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow E_{ολ} = σταθ}$$

(*) Προέκυψε από τη συνέπεια κινητικής συν άθροισμα δυναμικού

Διανυσματική μορφή η διαφορική της $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ (ενέργεια)

Παράδειγμα: ομογενές πεδίο βαρύτητας $\boxed{\vec{F} = -mg\hat{k}}$ (*)

Δηλαδή $\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{dV}{dx}\hat{i} + \frac{dV}{dy}\hat{j} + \frac{dV}{dz}\hat{k}\right)$

$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{V = V(y,z)}$, $\frac{dV}{dy} = 0 \Rightarrow \boxed{V = V(z)}$: V: συνάρτηση του z

$V' = mg \Rightarrow V = mgz + c$ για $z = z_0$ $V(z_0) = 0$

$\Rightarrow V(z) = mg(z - z_0)$

Παρατήρηση: Να ελέγξω τις 3 συνθήκες που είναι ↑ Τις έχω ελέγξει: πράγματι το (*) είναι συντηρητικό πεδίο

Ευθύγραμμη κίνηση

Έστω $\vec{F} = f(x)\hat{i}$ τότε προφανώς

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

και $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ ή $\frac{dV}{dx} = -f(x) \Leftrightarrow V(x) = \int f(x)dx$

↳ Η παράγωγος της δυναμικής μου δίνει την ενέργεια

Παράδειγμα: Νόμος του Hooke: $F = -kx$

$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

Πεδία κεντρικών δυνάμεων: οι δυνάμεις που μας έλκουν σε ένα κέντρο

Εξ' ορισμού κεντρικές καλούνται οι δυνάμεις για τις οποίες $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, όπου $\hat{r}$ το μοναδιαίο διάνυσμα σε πολικές συν/νες ή $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Μου λέει πόσο μακριά είμαι από το κέντρο

Άσκηση: Να δείξετε ότι για αυτές τις δυνάμεις $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

Λύση: Είναι επίσης προφανές ότι $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ άρα και η στροφορμή διατηρείται.

όμως

$$\boxed{\vec{\nabla} V = \frac{dV}{dr}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dV}{d\phi}\hat{\phi}}$$

: Για εξάσκηση να κάνω τις πράξεις.

σε σφαιρικές συν/νες

Δηλαδή $\vec{\nabla} V = -\vec{F} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dV}{dr} = -f(r) \\ \dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{dV}{d\varphi} = 0 \end{cases}$

άρα: $V = -\int f(r)\,dr$

Παρατήρηση: κεντρικές δυνάμεις είναι συντηρητικές και διατηρούν τη στροφορμή!